

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИКВИДНОСТИ БАНКА С ПОМОЩЬЮ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Тауханов Артур Дмитриевич

k.dzhumanova@asu.edu.kz

Магистрант 1 курса образовательной программы 7M05403 -«Математика и компьютерные науки»

Атырауский университет имени Х. Досмухамедова, г. Атырау, Республика Казахстан

Научный руководитель – кандидат физико-математических наук, ассоциированный профессор Шаждекеева Н.К.

Аннотация. В статье рассматривается моделирование ликвидности банка с использованием обыкновенных дифференциальных уравнений. Анализируется динамика изменения ликвидных активов банка под воздействием притока депозитов, выдачи кредитов и других финансовых потоков. Построенная математическая модель позволяет описать процесс управления ликвидностью во времени и оценить влияние различных экономических факторов на устойчивость банковской системы. Результаты исследования могут быть использованы для прогнозирования состояния ликвидности банка и повышения эффективности финансового управления.

Ключевые слова: ликвидность банка, математическое моделирование, обыкновенные дифференциальные уравнения, финансовая система, банковские активы, управление ликвидностью, динамическая модель.

Аңдатпа. Мақалада банктің өтімділігін жай дифференциалдық теңдеулер көмегімен модельдеу қарастырылады. Банктің өтімді активтерінің өзгеру динамикасы депозиттердің түсуі, несиелердің берілуі және басқа да қаржылық ағындардың әсері арқылы талданады. Құрылған математикалық модель уақыт бойынша өтімділікті басқару үдерісін сипаттауға және экономикалық факторлардың банк жүйесінің тұрақтылығына әсерін бағалауға мүмкіндік береді. Зерттеу нәтижелері банктің өтімділік жағдайын болжауға және қаржылық басқарудың тиімділігін арттыруға қолданылуы мүмкін.

Түйінсөздер: банк өтімділігі, математикалық модельдеу, жай дифференциалдық теңдеулер, қаржы жүйесі, банк активтері, өтімділікті басқару, динамикалық модель.

Abstract. The article considers the modeling of bank liquidity using ordinary differential equations. The dynamics of changes in liquid assets are analyzed under the influence of deposit inflows, loan issuance, and other financial flows. The developed mathematical model makes it possible to describe the process of liquidity management over time and evaluate the impact of various economic factors on the stability of the banking system. The results of the study can be used to forecast the liquidity position of a bank and improve the efficiency of financial management.

Keywords: bank liquidity, mathematical modeling, ordinary differential equations, financial system, bank assets, liquidity management, dynamic model.

Введение. Обеспечение ликвидности в коммерческих банках представляет собой одну из самых важных задач, особенно в условиях нестабильности финансовой среды. Ликвидность, в свою очередь, определяется как способность банка выполнять свои обязательства перед вкладчиками и контрагентами в срок и в полном объёме, не допуская при этом значительных потерь в стоимости своих активов. Если ликвидность нарушается, это может привести к возникновению системных рисков. История знает множество примеров, когда кризисы в финансовой системе, такие как мировой финансовый кризис

2008 года или недавние проблемы с некоторыми банками, включая Silicon Valley Bank, подчеркивали важность этой проблемы.

С введением современных регуляторных требований, сформированных в рамках международных соглашений Базель III, внимание к количественной оценке ликвидности стало ещё более актуальным. В рамках этих соглашений были внедрены такие нормативы, как коэффициенты краткосрочной и долгосрочной ликвидности (LCR и NSFR). Эти нормативы направлены на то, чтобы банки имели достаточный запас ликвидных активов для выполнения своих обязательств. Тем не менее, большинство инструментов, применяемых для анализа ликвидности, имеют статический или квазистатический характер. Они основываются на балансовых соотношениях и сценарных стресс-тестах, что не всегда отражает реальную динамику процессов, происходящих в банке.

Важно отметить, что банковские потоки, такие как приток и отток депозитов, изменения в кредитном портфеле и колебания процентных ставок, имеют динамическую природу. Это требует применения методов, способных описывать изменения показателей во времени. Одним из перспективных направлений в этой области является использование аппарата обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Этот подход позволяет формализовать взаимосвязи между ключевыми финансовыми переменными и исследовать их динамику в непрерывном времени.

Применение ОДУ предоставляет возможность выявления устойчивых и неустойчивых режимов функционирования банка. Это также позволяет определить критические параметры, при которых система теряет своё равновесие, а также создать сценарии развития ликвидности при различных управленческих решениях. Например, с помощью таких моделей можно проанализировать, как изменение процентных ставок или скорость кредитной экспансии влияет на ликвидность банка.

Несмотря на существующие исследования в области банковского риск-менеджмента и финансовой математики, вопросы, касающиеся построения и анализа детерминированных динамических моделей ликвидности на основе систем ОДУ, остаются недостаточно разработанными. В частности, стоит уточнить механизмы включения в модель поведенческих факторов вкладчиков, скорости кредитной экспансии и нормативных ограничений. Также необходимо разработать методы оценки устойчивости полученной системы. Таким образом, целью данного исследования является разработка и анализ динамической модели ликвидности коммерческого банка. Это включает в себя создание математической модели, которая будет учитывать все вышеперечисленные факторы и позволит более точно прогнозировать ликвидность банка в условиях изменяющейся финансовой среды. Кроме того, важно рассмотреть, как различные управленческие решения могут повлиять на ликвидность и устойчивость банка, а также какие меры могут быть предприняты для минимизации рисков, связанных с нарушением ликвидности.

Материалы и методы. В рамках настоящего исследования для анализа динамики ликвидности коммерческого банка используется аппарат обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), позволяющий описать изменение ключевых финансовых показателей во времени. Ликвидность банка рассматривается как функция времени ($L(t)$), отражающая объем высоколиквидных активов, доступных для выполнения текущих обязательств. Основное предположение модели заключается в том, что изменение ликвидности определяется балансом притоков и оттоков денежных средств. Общая форма модели записывается следующим образом:

$$\frac{dL(t)}{dt} = I(t) - O(t)$$

где:

- ($I(t)$) — притоки ликвидности (депозиты, возврат кредитов, доходы от операций),

- ($O(t)$) — оттоки ликвидности (выдача кредитов, снятие депозитов, операционные расходы).

Построение базовой модели

Для упрощения анализа предполагается, что притоки и оттоки могут зависеть от текущего уровня ликвидности:

$$I(t) = \alpha L(t), \quad O(t) = \beta L(t)$$

где:

- α — коэффициент притока средств,
- β — коэффициент оттока средств.

Тогда дифференциальное уравнение принимает вид:

$$\frac{dL(t)}{dt} = (\alpha - \beta)L(t)$$

Решение данного уравнения:

$$L(t) = L_0 e^{(\alpha - \beta)t}$$

где (L_0) — начальный уровень ликвидности.

Для учета внешних факторов (например, кризисов или регуляторных изменений) вводится дополнительная функция:

$$\frac{dL(t)}{dt} = (\alpha - \beta)L(t) + u(t)$$

где ($u(t)$) — внешнее воздействие (шоки ликвидности, вмешательство центрального банка).

В работе применяются следующие методы:

- аналитическое решение дифференциальных уравнений;
- качественный анализ поведения решений (устойчивость, равновесие);
- численное моделирование (метод Эйлера, метод Рунге–Кутты);
- сценарный анализ (стресс-тестирование ликвидности).

Моделирование проводится для различных значений параметров (α), (β), а также различных функций ($u(t)$), что позволяет оценить устойчивость банковской системы при изменении внешних условий.

Полученные модели позволяют сделать следующие интерпретации:

- Если ($\alpha > \beta$), ликвидность банка растет экспоненциально, что соответствует устойчивому финансовому состоянию.
- Если ($\alpha < \beta$), наблюдается снижение ликвидности, что может привести к дефициту средств и риску неплатежеспособности.
- При ($\alpha = \beta$) ликвидность остается постоянной, что отражает равновесное состояние.

Введение внешнего воздействия ($u(t)$) позволяет моделировать:

- кризисные явления (резкое снижение ликвидности),
- государственную поддержку (положительный импульс),
- сезонные колебания.

Таким образом, предложенные модели позволяют не только описывать динамику ликвидности банка, но и проводить прогнозирование, а также оценивать последствия управленческих решений и внешних экономических факторов.

Анализ и результаты. В основе метода лежит следующий принцип: если известна закономерность изменения экономической величины, то ее динамику можно описать через производную этой величины по времени.

Пример 1. Логистическая модель распространения информации

В статье рассматривается пример распространения информации о новом товаре среди покупателей.

Пусть

- $x(t)$ — число людей, которые уже знают о товаре
- N — общее число потенциальных покупателей

Скорость распространения информации пропорциональна:

- количеству людей, знающих о товаре
- количеству людей, которые ещё не знают

Математическая модель имеет вид логистического уравнения:

$$dx = kx(n - x)dt$$

где

- $x(t)$ — число информированных покупателей
- N — максимальное число покупателей
- k — коэффициент распространения информации

Решение модели

Решение логистического уравнения имеет вид

$$x(t) = N / (1 + Ce^{-kNt})$$

где

- C — константа, зависящая от начального условия.

Интерпретация результатов

В статье рассматривается пример:

- всего покупателей $N=10000$
- изначально знают о товаре 2500

$$x(t) = \frac{n}{1 + (\gamma - 1)e^{-kt}} = \frac{10000}{1 + 3 \cdot e^{-2 \cdot 10^{-2} t}}$$

Через **20 дней**

$$x(20) \approx 3321$$

Через **30 дней**

$$x(30) \approx 3778$$

Это означает, что информация распространяется постепенно и сначала рост происходит медленно, затем быстрее, а позже снова замедляется.

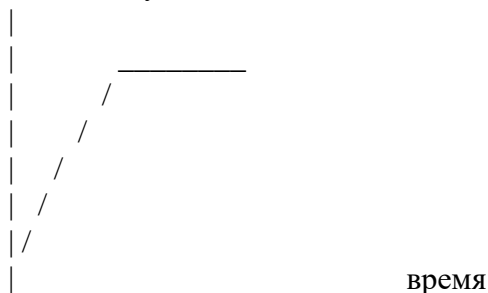
График имеет **S-образную форму**.

Он показывает три стадии:

1. медленное распространение информации
2. быстрый рост
3. насыщение рынка

Примерный вид графика:

число покупателей



Пример 2. Модель спроса и предложения

Другой пример из статьи — динамика спроса и предложения на рынке.

Пусть

- $p(t)$ — цена товара
- $D(p)$ — спрос

- $S(p)$ — предложение

Изменение цены зависит от разницы между спросом и предложением.

Модель можно записать как:

$$\frac{dp}{dt} = a(D(p) - S(p))$$

где

- a — коэффициент скорости изменения цены.

Интерпретация модели

1. Если $D(p) > S(p)$

спрос превышает предложение, цена растет.

2. Если $D(p) < S(p)$

предложение больше спроса, цена падает.

3. Если $D(p) = S(p)$

рынок находится в **равновесии**.

Применение модели к ликвидности банка

Аналогичный принцип можно использовать для моделирования ликвидности банка.

Пусть

- $L(t)$ — ликвидные средства банка
- $I(t)$ — приток средств
- $O(t)$ — отток средств

Тогда динамика ликвидности описывается уравнением

$$dL/dt = I(t) - O(t)$$

Интерпретация

1. Если приток средств больше оттока ликвидность банка увеличивается.

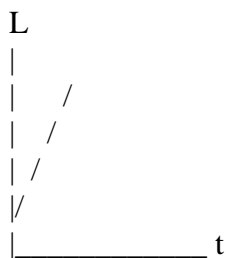
2. Если приток равен оттоку ликвидность остается стабильной.

3. Если отток превышает приток возникает риск **ликвидного кризиса**.

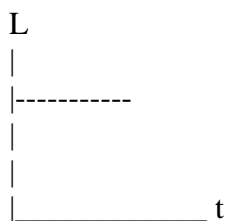
График динамики ликвидности

Возможны три сценария:

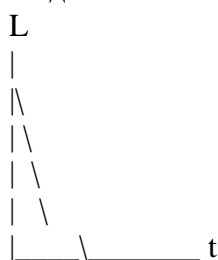
Рост ликвидности



Стабильность



Падение ликвидности



Заключение. Использование обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет описывать динамику экономических процессов и анализировать изменение ключевых показателей во времени. Модели такого типа применяются для анализа распространения информации, рыночных механизмов и финансовых потоков.

На основе аналогичных принципов можно строить модели ликвидности банка, что позволяет прогнозировать финансовое состояние кредитной организации и предотвращать кризисы ликвидности.